PD Emanuel Scheidegger
B. Sc. Thomas Spittler
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Übungsblatt 3

Torsionspunkte und Isogenie elliptischer Kurven

9. Die Weierstraß'sche σ–Funktion, Quasiperioden, und die Legendre–Relation

   Es sei $L = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$, $\operatorname{Im} \frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$. Wir definieren die Weierstraß'schen σ– und ζ–Funktionen durch

$$\sigma(z) := \sigma(z, L) := z \prod_{\omega \in L \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) \exp\left(\frac{z}{\omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\omega}\right)^2\right),$$
$$\zeta(z) := \zeta(z, L) := \frac{\sigma'(z, L)}{\sigma(z, L)}.$$

   (a) (1 Punkt) Für $k \in \mathbb{N}$ sei $L_k = \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}, \max\{|n_1|, |n_2|\} = k\}$. Wählen Sie eine Anordnung $s_0 = 0, s_1 = \omega_1, s_2, \dots \in L$, so dass die s_n der Reihe nach im Gegenuhrzeigersinn alle Punkte in L_k mit wachsendem k durchlaufen (Skizze!) und dass gilt: $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$. Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{z}{s_n}|^3$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert.

   (b) (1 Punkt) Zeigen Sie mit Hilfe des Weierstraß'schen Produktsatzes und Aufgabe (a), dass $\sigma \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, und dass die Nullstellen von $\sigma(z)$ genau in $z \in L$ liegen und erster Ordnung sind.

   (c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\zeta \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus L)$, und dass gilt: $\zeta' = -\wp$.

   (d) (1 Punkt) Es seien $\eta_i := \zeta(z + \omega_i) - \zeta(z), i = 1, 2$. Zeigen Sie, dass $\eta_i, i = 1, 2$ nicht von z abhängen, und dass die Legendre'sche Relation $\eta_2\omega_1 - \eta_1\omega_2 = 2\pi i$ gilt. Die η_i heissen Quasiperioden von L.

10. Wendepunkte und Additionsgesetz elliptischer Kurven

   (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß ein Wendepunkt $p \in E$ auf einer elliptischen Kurve E der Beziehung $2p = -p$ genügt (cf. Aufgabe 2).

   (b) (1 Punkt) Wieviele Wendepunkte gibt es ausser dem Punkt im Unendlichen (cf. Aufgabe 3) ? Geben Sie die Gleichung für die x–Koordinaten dieser Wendepunkte an, und lösen Sie die Gleichung für die Kurve $y^2 = 4x^3 - 8x$.

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß gilt: Verbindet man zwei Wendepunkte von E durch eine Gerade, so schneidet die Gerade die Kurve E in einem weiteren Wendepunkt. Es gibt 12 verschiedene Verbindungsgeraden von Wendepunkten von E.

(d) (1 Punkt) Der Punkt $(2,4)$ liegt auf der Kurve $y^2 = 4x^3 - 8x$. Zeigen Sie, daß sein Doppeltes bezüglich der Addition auf elliptischen Kurven der Punkt $\left(\frac{9}{4}, -\frac{21}{4}\right)$ ist.

11. Elliptische Kurven über $\mathbb{Q}$

    Es seien k ein Körper und $E = \{(x,y) \in k^2 \mid y^2 = 4x^3 - 1728, x \neq 0\}$ und $E' = \{(u,v) \in k^2 \mid u^3 + v^3 = 1\}$ zwei elliptische Kurven.

    (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß es eine Bijektion $\alpha : E(\mathbb{C}) \to E'(\mathbb{C})$ gibt.

    (b) (1 Punkt) Bestimmen Sie alle Punkte von $E'(\mathbb{Q})$. Verwenden Sie dazu den letzten Satz von Fermat.

    (c) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß $\widehat{E}(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

12. Isomorphie von komplexen Tori

    (4 Punkte) Es seien zwei Gitter $L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ und $L' = \mathbb{Z}\omega_1' + \mathbb{Z}\omega_2'$ mit $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} \in \mathcal{H}$ und $\tau' = \frac{\omega_2'}{\omega_1'} \in \mathcal{H}$. Zeigen Sie, daß $\mathbb{C}/L$ und $\mathbb{C}/L'$ genau dann isogen bzw. isomorph sind, wenn es ein Element $\gamma \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$ bzw. $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit der Eigenschaft $\tau' = \gamma\tau$ gibt. Hier ist $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q}) = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \mid \det A > 0\}$.

Abgabetermin: Dienstag, 14. 11. 2017 um 10:00 Uhr.